ELETTROMAGNETISMO
PARTE VI - CAMPO MAGNETICO

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

Esercizio 1. Esprimere le unità di misura del campo magnetico B in funzione delle dimensioni fondamentali M, L, T, i, (massa, lunghezza, tempo e intensità di corrente.

Soluzione. Il campo magnetico è espresso dalla relazione

$$B = \frac{F_B}{|q|\,v}$$

dove F_B è la cosiddetta forza di Lorentz. Le unità di misura saranno (equazione dimensionale)

$$[B] = \left[\frac{M\frac{L}{T^2}}{iT\frac{L}{T}} = \frac{M}{iT^2}\right]$$

Esercizio 2. Un protone in moto a un angolo di 23.0° rispetto a un campo magnetico di $2.60\,mT$ risente di una forza magnetica di $6.50 \cdot 10^{-17}\,N$. Calcolare la velocità e l'energia cinetica in eV del protone.

La forza magnetica è espressa da

$$F_B = qvB\sin\alpha$$

dove α è l'angolo tra i vettori campo magnetico $\overrightarrow{B}$ e velocità $\overrightarrow{v}$. Pertanto

$$v = \frac{F_B}{qB\sin\alpha} = \frac{6.50 \cdot 10^{-17}\,N}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 2.60 \cdot 10^{-3}\frac{N}{\frac{Cm}{s}} \times \sin 23.0} = 4.04 \cdot 10^5\,\frac{m}{s}$$

L'energia cinetica, $K = \frac{1}{2}mv^2$, sarà

$$K = \frac{1}{2} \times 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg \times \left(4.04 \cdot 10^5\,\frac{m}{s}\right)^2 = 1.36 \cdot 10^{-16}\,J = 852\,eV$$

essendo il fattore di conversione $1\,J = 6.242 \cdot 10^{18}\,eV$.

Esercizio 3. Trovare l'accelerazione di un protone che si muove con una velocità di $6.5\,{}^{m}/_{s}$ in direzione perpendicolare a un campo magnetico di $1.6\,T$.

Ricordando la seconda legge di Newton sappiamo che una forza qualsiasi può essere espressa da $F = ma$. Pertanto

$$ma = qvB\sin\alpha$$

L'angolo tra il campo, la direzione di moto del protone e la forza è sempre di $90°$ e quindi $\sin 90° = 1$; ricavando l'accelerazione , si ha

$$a = \frac{qvB}{m} = \frac{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 6.5\,\frac{m}{s} \times 1.6\,T}{1.67 \cdot 10^{-27}\,kg} = 9.9 \cdot 10^8\,\frac{m}{s^2}$$

Esercizio 4. Un elettrone si muove perpendicolarmente a un campo magnetico di $0.18\,T$. Sapendo che sull'elettrone agisce una forza di $8.9 \cdot 10^{-16}\,N$, trovare la sua velocità.

Soluzione. Anche in questo caso possiamo considerare $\sin\alpha = 1$, per cui da $F = qvB$, possiamo ricavare la velocità v:

$$v = \frac{F}{qB} = \frac{8.9 \cdot 10^{-16}\,N}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 0.18\,T} = 3.1 \cdot 10^5\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 5. Uno ione carico negativamente si muove verso nord con una velocità di $1.5 \cdot 10^5\,{}^{m}/_{s}$ all'equatore terrestre. Trovare la forza magnetica esercitata su di esso.

Soluzione. Se lo ione si sposta dall'equatore verso nord il vettore velocità risulta parallelo al campo magnetico terrestre e quindi la forza è nulla in quanto $\sin\alpha = 0$.

Esercizio 6. Una particella dotata di una carica di $0.32\mu C$ si muove con una velocità di $16\,{}^{m}/_{s}$ in una zona in cui il campo magnetico ha un'intensità di $0.95\,T$. Calcolare l'angolo tra il campo e la direzione della particella se la forza esercitata su quest'ultima è pari a $4.8\cdot 10^{-6}\,N$.

Soluzione. Dalla relazione che descrive la forza di Lorentz, $F = qvB\sin\alpha$, risolvendo rispetto all'angolo e ricordando le funzioni goniometriche, si ha

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{F}{qvB}\right) = \arcsin\left(\frac{4.8\cdot 10^{-6}\,N}{0.32\cdot 10^{-6}C\times 16\,\frac{m}{s}\times 0.95\,T}\right) = 81^\circ$$

Esercizio 7. Una particella con una carica di $14\mu C$ è sottoposta a una forza di $2.2\cdot 10^{-4}\,N$ quando si muove perpendicolarmente a un campo magnetico con una velocità di $27\,{}^{m}/_{s}$. Trovare la forza che agisce sulla particella quando questa si muove con una velocità di $6.3\,{}^{m}/_{s}$a un angolo di 25° rispetto al campo magnetico.

Soluzione. Indichiamo con $F = qvB\sin 90^\circ$ la forza a cui è sottoposta la particella quando si muove perpendicolarmente al campo e com $F_1 = qv_1B\sin 25^\circ$nel secondo caso. Calcoliamo il loro rapporto

$$\frac{F}{F_1} = \frac{qvB}{qv_1B\sin 25^\circ} = \frac{v}{v_1\sin 25^\circ}$$

Allora

$$F_1 = F\frac{v_1\sin 25^\circ}{v} = 2.2\cdot 10^{-4}\,N\times\frac{6.3\times\sin 25^\circ}{27} = 2.2\cdot 10^{-5}\,N$$

Esercizio 8. Uno ione è soggetto a una forza magnetica di $6.2\cdot 10^{-16}\,N$ quando si muove nella direzione positiva dell'asse x, ma non è soggetto ad alcuna forza magnetica quando si muove nella direzione positiva dell'asse y. Trovare l'intensità della forza magnetica esercitata sullo ione quando si muove nel piano xy lungo la retta $y = x$. Si assuma il modulo della velocità dello ione sempre lo stesso in tutti i casi.

Soluzione. Indichiamo con F_1 la forza nel primo caso, per cui $F_1 = qvB\sin\alpha_1$ e con F_2 la forza nel secondo caso, cioè $F_2 = qvB\sin\alpha_2$. Calcolando il loro rapporto possiamo esprimere F_2 in funzione di F_1

$$F_2 = F_1\frac{qvB\sin\alpha_2}{qvB\sin\alpha_1} = F_1\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

Ora $\alpha_2 = 45^\circ$, essendo la retta $y = x$ la direzione della bisettrice dell'angolo retto, mentre $\alpha_1 = 90^\circ$. Pertanto

$$F_2 = F_1\frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = 6.2\cdot 10^{-16}\,N\times\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = 4.4\cdot 10^{-16}\,N$$

Esercizio 9. Un elettrone che si muove con una velocità di $4.2\cdot 10^5\,\frac{m}{s}$ nella direzione positiva dell'asse x non è soggetto ad alcuna forza magnetica. Quando si muove nella direzione positiva dell'asse y è soggetto a una forza di $2.0\cdot 10^{-13}\,N$ nella direzione negativa dell'asse z. Determinare la direzione, il verso e l'intensità del campo magnetico.

Soluzione. Se nel primo caso (direzione positiva asse x) la forza è nulla vuol dire che il campo è parallelo a tale direzione. Se si muove lungo l'asse y, il campo sarà perpendicolare alla direzione della velocità; ma essendo la forza perpendicolare ma diretta nel verso negativo, avremo $\alpha = 270^\circ$ e $\sin\alpha = -1$, per cui

$$F = qvB$$

da cui

$$2.0\cdot 10^{-13}\,N = 1.6\cdot 10^{-19}\,C\times 4.2\cdot 10^5\,\frac{m}{s}\times B\times(-1)$$

da cui

$$B = -3.0\,T$$

Esercizio 10. Due particelle cariche con velocità differenti attraversano un campo magnetico uniforme. Le particelle si muovono nella stessa direzione e sono soggette a forze magnetiche di uguale intensità. Calcolare il rapporto tra le due velocità, sapendo che la carica della particella 1 è quattro volte la carica della particella 2.

Soluzione. In questo caso le forze applicate sulle due particelle sono uguali, per cui

$$q_1 v_1 B = q_2 v_2 B$$

ma $q_1 = 4q_2$ e si avrà

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{q_2}{4q_2} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 11. Una particella dotata di una carica di $6.60\mu C$ attraversa una regione dello spazio in cui sono presenti un campo elettrico di intensità $1250\,\mathrm{N/C}$ diretto nel verso positivo dell'asse x e un campo magnetico di intensità $1.02\,t$ diretto nel verso positivo dell'asse z. Sapendo che la forza risultante che agisce sulla particella è di $6.23 \cdot 10^{-3}\,N$ nel verso positivo dell'asse x, determinare l'intensità, la direzione e il verso della velocità della particella. Supporre che la particella si muova nel piano xy.

Soluzione. Ricordando che la forza elettrica è espressa da $F_e = qE$ e la forza magnetica da $F_m = qvB$, la forza risultante, essendo tutti i vettori tra loro perpendicolari, sarà espressa da $F = q\,(E + vB)$. Pertanto:

$$6.23 \cdot 10^{-3}\,N = 6.60 \cdot 10^{-6}\,C\,(1250 + 1.02 \cdot v)$$

risolvendo rispetto a v si ha

$$v = \frac{6.23 \cdot 10^{-3} - 1250 \times 6.60 \cdot 10^{-6}\,N}{1.02 \times 6.60 \cdot 10^{-6}} = -300\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 12. Un protone in quiete è soggetto a una forza elettromagnetica di intensità pari a $8.0 \cdot 10^{-13}\,N$ diretta nel verso positivo dell'asse x. Quando il protone si muove con una velocità di $1.5 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m/s}$ nel verso positivo dell'asse y la forza elettromagnetica risultante alla quale è soggetto diminuisce fino a $7.5 \cdot 10^{-13}\,N$, mantenendo la direzione iniziale. Determinare l'intensità, la direzione e il verso del campo elettrico e del campo magnetico.

Soluzione. Calcoliamo prima l'intensità del campo elettrico

$$E = \frac{F}{q} = \frac{8.0 \cdot 10^{-13}\,N}{1.6 \cdot 10^{-19}\,C} = 5.0 \cdot 10^{6}\,\frac{N}{C}$$

Se $v \perp F$ allora,

$$qe + qvB = 7.5 \cdot 10^{-13}\,N$$

Sostituendo si avrà

$$8.0 \cdot 10^{-13} + 1.6 \cdot 10^{-19} \times 1.5 \cdot 10^{6} B = 7.5 \cdot 10^{-13}$$

ricavando ora B, si ha

$$B = \frac{-0.5 \cdot 10^{-13}}{1.6 \cdot 10^{-19} \times 1.5 \cdot 10^{6}} = -0.21\,T$$

Esercizio 13. Calcola il raggio dell'orbita di un protone che si muove perpendicolarmente al campo magnetico di $0.66\,T$ con una velocità di $6.27 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s}$.

Soluzione. Abbiamo $v \perp B$. Considerando che la forza magnetica è una forza centripeta che modifica la direzione di moto di una particella ma non ne aumenta il modulo della velocità, si ha

$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

semplificando e risolvendo rispetto a r, si ha

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \times 6.27 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s}}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 0.66\,T} = 5.41 \cdot 10^{-6}\,m$$

Esercizio 14. Alcune particelle cariche attraversano un selettore di velocità con campo elettrico e magnetico perpendicolari l'uno all'altro (v. diretto lungo il semiasse positivo delle x; B lungo il semiasse positivo z e E lungo il semiasse negativo y). Se l'intensità del campo elettrico è di $450\,\mathrm{N/C}$ e quella del campo magnetico è di $0.18\,T$. Trovare la velocità che devono possedere le particelle per attraversare il selettore senza essere deflesse.

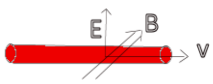
Soluzione. Tenendo conto della regola della mano dx, la forza magnetico sarà diretta parallelamente al campo magnetico ma con verso opposto (semiasse positivo delle y). Pertanto, se le particelle non vengono deflesse, la forza magnetica ed elettrica si equilibrano. Avremo

$$F_e = F_m qE = qvB$$

da cui

$$v = \frac{E}{B} = \frac{450}{0.18} = 2500\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 15. Un'arteria ha un diametro interno di $2.75\,mm$ e attraversa una regione in cui l'intensità del campo magnetico è $0.065\,T$. Sapendo che la differenza di potenziale tra gli elettrodi posti agli estremi del diametro dell'arteria è di $195\,\mu V$,trovare la velocità con cui scorre il sangue.



Soluzione. La forza magnetica, in questa configurazione, è diretta parallelamente al campo elettrico ma in verso opposto. Sapendo che $E = -\frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{195\cdot 10^{-6}\,V}{2.75\cdot 10^{-3}\,m} = 7.10\cdot 10^{-2}\,\frac{V}{m}$ si ha

$$qE = qvB \qquad\qquad v = \frac{E}{B} = \frac{7.10\cdot 10^{-2}}{0.068} = 1.04\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 16. Un elettrone inizialmente in quiete viene accelerato attraverso una differenza di potenziale di $550\,V$ ed entra in un campo magnetico costante. Sapendo che l'elettrone segue una traiettoria circolare il cui raggio è di $17\,cm$, trovare l'intensità del campo magnetico.

Soluzione 17. Il campo elettrico è un campo conservativo e, applicando la legge di conservazione dell'energia, si può ricavare che la velocità dell'elettrone è pari a

$$v_e = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 1.60\cdot 10^{-19}\,C\times 550\,V}{9.11\cdot 10^{-31}\,kg}} = 1.39\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$$

Pertanto, da $m\frac{v^2}{r} = evB$ (forza magnetica come forza centripeta), ricavando B si ha

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{9.11\cdot 10^{-31}\,kg\times 1.39\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}}{1.60\cdot 10^{-19}\,C\times 17\cdot 10^{-2}\,m} = 4.66\cdot 10^{-4}\,T$$

Esercizio 18. Una particella con carica $12.5\,\mu C$ e massa $2.80\cdot 10^{-5}\,kg$ si muove perpendicolarmente a un campo magnetico di $1.01\,T$ lungo una traiettoria circolare di raggio $21.8\,m$. Trovare la velocità alla quale si muove la particella e il tempo impiegato dalla stessa per completare un'orbita.

Soluzione. Come è noto, la forza magnetica (forza di Lorentz) è una forza centripeta, cioè una forza che modifica la traiettoria della particella. Pertanto, ricordando la definizione di forza centripeta si può scrivere

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$

da cui

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{12.5\cdot 10^{-6}\,C\times 1.01\,T\times 21.8\,m}{2.80\cdot 10^{-5}\,kg} = 9.83\,\frac{m}{s}$$

Trattandosi di una traiettoria circolare, possiamo applicare le leggi del moto circolare uniforme secondo le quali

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\times 21.8\,m}{9.83\,\frac{m}{s}} = 13.9\,s$$

Esercizio 19. Una particella carica che entra in un campo magnetico uniforme segue una traiettoria circolare. Supponiamo che il campo magnetico abbia un'intensità di $0.180\,T$, che la velocità della particella sia pari a $6.0 \cdot 10^6\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$ e che il raggio della sua traiettoria sia $52.0\,cm$. Calcolare la massa della particella sapendo che la sua carica ha valore assoluto pari a $1.60 \cdot 10^{-19}\,C$.

Utilizzando sempre la relazione

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$

si può ottenere la massa sostituendo i valori delle grandezze assegnate

$$m = \frac{qBr}{v} = \frac{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 0.180\,T \times 0.52\,m}{6.0 \cdot 10^6\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}} = 2.5 \cdot 10^{27}\,kg$$

Una particella alfa (il nucleo di un atomo di elio) è formata da due protoni e due neutroni e ha una massa pari

a $6.64 \cdot 10^{-27}\,kg$. Un fascio orizzontale di particelle alfa penetra con una velocità di $1.3 \cdot 10^5\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$in una regione in cui è presente un campo magnetico verticale di intensità $0.155\,T$. Trovare il tempo necessario perché una particella alfa percorra mezza circonferenza. Se si raddoppia la velocità della particella alfa, il tempo calcolato aumenta, diminuisce o rimane invariato?

Soluzione. I vettori velocità e campo magnetico sono tra loro perpendicolari e la relazione diviene

$$m\frac{v^2}{r} = qvBsemplificando \qquad m\frac{v}{r} = qB$$

ma considerando il moto della particella come un tratto di un moto circolare uniforme, possiamo sostituire $v = \frac{2\pi r}{T}$, dove T è il periodo di rotazione. sostituendo si ha

$$m\frac{2\pi r}{rT} = qB \qquad m\frac{2\pi}{T} = qB$$

da cui

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB} = \frac{\pi \times 6.64 \cdot 10^{-27}\,kg}{2 \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 0.155\,T} = 4.21 \cdot 10^{-7}\,s$$

Come si può vedere dalla relazione sopra, il tempo dipende dalla particella e dal campo magnetico, per cui rimarrà invariato al raddoppiare della velocità; cambierà il raggio di curvatura della traiettoria.

Esercizio 20. Un elettrone e un protone si muovono lungo orbite circolari in un piano perpendicolare a un campo magnetico uniforme $\overrightarrow{B}$. Calcolare il rapporto tra i raggi delle loro orbite quando l'elettrone e il protone hanno (a) lo stesso momento (b) la stessa energia cinetica.

Soluzione. Le due particelle hanno la stessa carica ma diversa massa. Se hanno lo stesso momento vuol dire che $m_e v_e = m_p v_p$. Ne segue che, confrontando ora le forze magnetiche centripete, si ha

$$m_p\frac{v_p}{r_p} = m_e\frac{v_e}{r_e}$$

si ha quindi,

$$\frac{r_p}{r_e} = 1$$

Se ora poniamo uguali le due energie cinetiche cioè$m_e v_e^2 = m_p v_p^2$, si avrà

$$m_e\frac{v_e^2}{r_e} = qBv_e \qquad m_p\frac{v_{2p}}{r_p} = qBv_p$$

$$\frac{m_e\frac{v_e^2}{r_e}}{m_p\frac{v_{2p}}{r_p}} = \frac{qBv_e}{qBv_p} \qquad \frac{r_p}{r_e} = \frac{v_e}{v_p}$$

ma

$$v_e = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}v_p$$

per cui

$$\frac{r_p}{r_e} = \frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 43$$

Esercizio 21. Gli elettroni nel fascio di un cinescopio televisivo hanno un'energia cinetica di $12.0\,keV$. Il cinescopio è orientato in modo che gli elettroni si muovano orizzontalmente dal sud magnetico al nord magnetico. La componente verticale del campo magnetico terrestre è diretta verso il basso e ha intensità di $0.55\,\mu T$. Trovare l'accelerazione di un elettrone deviato dal campo magnetico e la deviazione del fascio nel percorrere $20.0\,cm$ nel cinescopio.

Soluzione. Gli elettroni avranno una velocità ricavabile dall'energia cinetica pari a

$$v=\sqrt{\frac{2K}{m}}=\sqrt{\frac{2\times 12.0\cdot 10^{3}\times 1.602\cdot 10^{-19}\,J}{9.11\cdot 10^{-31}\,kg}}=6.50\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$$

La forza che subiscono per effetto della componente verticale del campo magnetico terrestre sarà

$$F_B=qvB=1.60\cdot 10^{-19}\,C\times 6.50\times 10^{7}\,\frac{m}{s}\times 0.55\cdot 10^{-6}\,\frac{Ns}{Cm}=5.72\cdot 10^{-18}\,N$$

L'accelerazione degli elettroni sarà ottenibile dalla seconda legge della dinamica

$$a=\frac{F}{m}=\frac{5.72\times 10^{-18}\,N}{9.11\cdot 10^{-31}\,kg}=6.28\cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}$$

Gli elettroni percorreranno una traiettoria curvilinea che può essere scomposta nelle sue componenti orizzontale e verticale (secondo quanto appreso nello studio dei moti piani). Lungo la componente orizzontale l'elettrone si muoverà di moto rettilineo uniforme, mentre lungo quella verticale il moto sarà uniformemente accelerato. Alla velocità calcolata, per percorrere $20.0\,cm$ basterà un tempo

$$t=\frac{s}{v}=\frac{0.20\,m}{6.50\times 10^{7}\,\frac{m}{s}}=3.08\cdot 10^{-9}\,s$$

e. durante questo periodo di tempo, percorrerà lungo la direzione verticale la distanza

$$s=\frac{1}{2}at^2=0.5\times 6.28\cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}\times\left(3.08\cdot 10^{-9}\,s\right)^2=2.98\cdot 10^{-5}\,m$$

Esercizio 22. Un elettrone ha velocità $\overrightarrow{v}=\left(2.0\cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}\right)\overrightarrow{i}+\left(3.0\cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}\right)\overrightarrow{j}$ e si muove in un campo magnetico $\overrightarrow{B}=(0.03\,T)\,\overrightarrow{i}+(-0.15\,T)\,\overrightarrow{j}$. Calcolare il modulo e la direzione della forza che agisce sull'elettrone. Si ripeta il calcolo per un protone avente la stessa velocità.

Soluzione. La forza esercitata dal campo magnetico sull'elettrone è data dalla relazione

$$\overrightarrow{F}=q\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}$$

Il calcolo del prodotto vettoriale può essere eseguito attraverso l'algebra matriciale per la quale, dati due vettori $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ tali che $\overrightarrow{u_1}=\left(a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k}\right)$ e $\overrightarrow{u_2}=\left(b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k}\right)$, allora il loro prodotto vettoriale è dato da

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}=(v_2B_3-v_3B_2)\,\overrightarrow{i}-(v_1B_3-v_3B_1)\,\overrightarrow{j}+(v_1B_2-v_2B_1)\,\overrightarrow{k}$$

ma i nostri due vettori hanno solo due dimensioni per cui $a_3=b_3=0$ e tutti i termini che li moltiplicano, pertanto, si annullano. Avremo quindi solo la componente $\overrightarrow{k}$, cioè la componente verticale alle altre due; ciò è corretto in quanto la forza è perpendicolare ai due vettori velocità e campo magnetico. Sostituiamo i valori, ottenendo

$$F=-1.6\cdot 10^{-19}\times\left(2.0\cdot 10^{6}\times(-0.15)-3.0\cdot 10^{6}\times 0.03\right)=6.2\cdot 10^{-14}\,N$$

Il valore ottenuto è positivo, per cui la direzione sarà quella positiva dell'asse z. Se consideriamo un protone che ha una carica positiva, avremo $F=1.6\cdot 10^{-19}\times\left(2.0\cdot 10^{6}\times(-0.15)-3.0\cdot 10^{6}\times 0.03\right)=-6.2\cdot 10^{-14}\,N$ e quindi sarà diretto lungo la direzione negativa dell'asse z.

Esercizio 23. Un elettrone con energia cinetica di $2.5\,keV$ si muove orizzontalmente in una regione dello spazio dove esiste un campo elettrico rivolto verticalmente verso il basso di $10\,\frac{kV}{m}$. Trovare il modulo e la direzione del (minor) campo magnetico che consente all'elettrone di continuare a muoversi orizzontalmente. Si ignori la forza di gravità, che è trascurabile.

Soluzione. L'elettrone si muove con una velocità orizzontale costante pari a

$$v=\sqrt{\frac{2K}{m}}=\sqrt{\frac{2\times 2.5\cdot 10^{3}\times 1.602\cdot 10^{-19}\,J}{9.11\cdot 10^{-31}\,kg}}=2.97\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$$

Il campo magnetico e quello elettrico sono tra loro incrociati e, in tale caso, i due campi produrranno una uguale deflessione se $qE=qvB\sin 90°=qvB$, da cui

$$B=\frac{E}{v}=\frac{10^{4}\,\frac{V}{m}}{2.97\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}}=3.4\cdot 10^{-4}\,T$$

La direzione del campo magnetico deve essere perpendicolare sia al campo elettrico (asse y negativo) che alla velocità dell'elettrone (asse x positivo). Poiché la forza elettrica $\overrightarrow{F}_e=(-e)\overrightarrow{E}$ è diretta lungo l'asse y positivo, la forza magnetica $\overrightarrow{F}_B=(-e)\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}$ sarà diretta lungo l'asse y negativo. Pertanto, la direzione del campo magnetico sarà lungo l'asse z negativo.

Esercizio 24. Un campo elettrico di $1.50\,\frac{kV}{m}$ e un campo di $0.400\,T$ agiscono su un elettrone in moto in maniera che questo risenta di una forza nulla. Calcolare la velocità minima v dell'elettrone.

Soluzione. La velocità minima affinché la risultante delle forze sia nulla è data da

$$v=\frac{E}{B}=\frac{1.50\cdot 10^{3}\,\frac{V}{m}}{0.400\,\frac{N}{A\cdot m}}=3.75\cdot 10^{3}\,\frac{m}{s}$$

[Analisi dell'equazione dimensionale. $Tesla=\frac{N}{A\cdot m}$, pertanto $\frac{V}{m}\cdot\frac{A\cdot m}{N}=\frac{V\cdot A}{N}=\frac{J}{N\cdot s}==\frac{N\cdot m}{N\cdot s}=\frac{m}{s}$].

Esercizio 25. Un elettrone ha velocità iniziale di $\left(12.0\,\frac{km}{s}\right)\boldsymbol{j}+\left(15.0\,\frac{km}{s}\right)\boldsymbol{k}$ e una accelerazione costante di $\left(2.00\cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}\right)\boldsymbol{i}$ in una regione in cui sono presenti campo elettrici e magnetici. Essendo $\boldsymbol{B}=(400\,\mu T)\,\boldsymbol{i}$, trovare il campo elettrico $\boldsymbol{E}$.

Soluzione. Per descrivere la forza che agisce sull'elettrone in presenza sia del campo magnetico sia di quello elettrico è necessario introdurre la relazione vettoriale

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)=m_e\boldsymbol{a}$$

da cui

$$\boldsymbol{E}=\frac{m_e\boldsymbol{a}}{q}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

Ora,

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}=\left(v_2B_3-v_3B_2\right)\overrightarrow{i}-\left(v_1B_3-v_3B_1\right)\overrightarrow{j}-\left(v_1B_2-v_2B_1\right)\overrightarrow{k}=$$
$$=\left(12.0\cdot 10^{3}\cdot 0-15.0\cdot 10^{3}\cdot 0\right)\overrightarrow{i}-\left(0\cdot 0-15.0\cdot 10^{3}\cdot 400\cdot 10^{-6}\right)\overrightarrow{j}+\left(0\cdot 0-12.0\cdot 10^{3}\cdot 400\cdot 10^{-6}\right)\overrightarrow{k}=(6.00)\,\overrightarrow{j}+(-4.8$$

per cui,

$$\boldsymbol{E}=\frac{9.11\cdot 10^{-31}\,kg}{-1.60\cdot 10^{-19}\,C}\times\left(2.00\cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}\right)\boldsymbol{i}-(6.00)\,\overrightarrow{j}-(4.80)\,\overrightarrow{k}=$$
$$=\left(-11.4\boldsymbol{i}-6.00\boldsymbol{j}+4.80\boldsymbol{k}\right)\,\frac{V}{m}$$

Esercizio 26. Un elettrone è accelerato da una differenza di potenziale di $1.0\,kV$ e si muove verso una regione compresa tra due piastre piane parallele separate da una distanza di $20\,mm$. Tra le piastre esiste una differenza di potenziale di $100\,V$. Se l'elettrone entra nella regione muovendosi perpendicolarmente al campo, trovare il campo magnetico, perpendicolare sia al percorso dell'elettrone sia al campo elettrico, necessario affinché l'elettrone viaggi in linea retta.

Soluzione. Affinché l'elettrone segua una traiettoria rettilinea la risultante delle forze ad esso applicate deve essere nulla. Pertanto

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)=0$$

da cui si ottiene

$$E=vB\sin\theta$$

Il prodotto vB dipende dall'angolo θ, che nella configurazione data è uguale a 90°, per cui $\sin\theta=1$ e quindi

$$B=\frac{E}{v}$$

La velocità si può ottenere dall'energia cinetica dell'elettrone

$$B=\frac{E}{\sqrt{\frac{2K}{m_e}}}$$

e sostituendo i valori, ricordando che in campo elettrico all'interno di un condensatore è dato da $E=\frac{V}{d}$ si ha

$$B=\frac{\frac{100}{20\cdot10^{-3}}\,\frac{V}{m}}{\sqrt{\frac{2\times1000\,eV\times1,60\cdot10^{-19}\,C}{9.11\cdot10^{-31}\,kg}}}=2.67\cdot10^{-4}\,T$$

:

Esercizio 27. Una sorgente produce ioni di ^6Li di massa uguale a $6.0\,u$ (unità di massa atomica), ciascuno dei quali ha carica netta $+e$. Gli ioni sono accelerati da una differenza di potenziale di $10\,kV$ e poi fatti passare orizzontalmente in una regione in cui c'è un campo magnetico verticale uniforme $B=1.2\,T$. Calcolare l'intensità del campo elettrico orizzontale che deve essere mantenuto nella stessa regione per permettere agli ioni di passare senza alcuna deflessione.

Soluzione. Anche in questo caso se gli ioni non vengono deflessi, deve valere la relazione

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)=0$$

da cui,

$$E=vB\sin\theta=vB$$

essendo il vettore velocità e campo magnetico tra loro perpendicolari. La velocità può essere ricavata dall'energia cinetica determinabile attraverso la conoscenza della differenza di potenziale che accelera gli ioni (infatti l'energia può essere espressa usando anche come unità di misura, l'elettronvolt, cioè l'energia guadagnata (o persa) dalla carica elettrica di un singolo elettrone, quando viene mosso nel vuoto tra due punti di una regione, ad $1\,m$ di distanza, in cui ha sede un potenziale elettrostatico, tra i quali vi è una differenza di $1\,V$). Sostituendo i valori, si ha

$$E=\sqrt{\frac{2K}{m_{Li}}}\times B=\sqrt{\frac{2\times1.0\cdot10^4\,V\times\left(6\times1.60\cdot10^{-19}\right)C}{6\times6.0\times1.67\cdot10^{-27}\,kg}}\times1.2\,T=6.78\cdot10^5\,\frac{V}{m}$$

Esercizio 28. Un elettrone è accelerato da fermo da una differenza di potenziale di $350\,V$. Esso entra in un campo magnetico uniforme di intensità pari a $200\,mT$ perpendicolarmente al campo. Calcolare la velocità dell'elettrone e il raggio del suo percorso nel campo magnetico.

Soluzione. L'elettrone parte con velocità $v=0$ e avrà un'energia cinetica pari a

$$\frac{1}{2}mv^2=qV=1.60\cdot10^{-19}\,C\times350\,V=5.60\cdot10^{-17}\,J$$

per cui, l'elettrone avrà una velocità

$$v=\sqrt{\frac{2\times5.60\cdot10^{-17}\,J}{9.11\cdot10^{-31}\,kg}}=1.11\cdot10^7\,\frac{m}{s}$$

La forza del campo magnetico agisce come una forza centripeta facendo curvare la traiettoria dell'elettrone, per cui

$$qvB=ma=\frac{mv^2}{r}$$

Pertanto, dividendo per v entrambi i membri, e risolvendo rispetto ad r si ha

$$r=\frac{mv}{qB}=\frac{9.11\cdot10^{-31}\,kg\times1.11\cdot10^7\,\frac{m}{s}}{1.60\cdot10^{-19}\,C\times200\cdot10^{-3}\,T}=3.16\cdot10^{-4}\,m$$

Esercizio 29. Trovare il campo magnetico da applicare, perpendicolarmente al fascio di elettroni che si muove a $1.3\cdot10^6\,\frac{m}{s}$, per far muovere gli elettroni su un arco circolare avente raggio di $0.35\,m$.

Soluzione. La forza esercitata dal campo magnetico è anche in questo caso una forza centripeta, per cui

$$evB = m\frac{v^2}{r}$$

dove $\frac{v^2}{r}$ è l'accelerazione centripeta prodotta dalla forza magnetica. Risolvendo rispetto a B, si ottiene

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \times 1.3 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 0.35\,m} = 2.1 \cdot 10^{-5}\,T$$

Esercizio 30. In un campo magnetico di intensità $B = 0.50\,T$, trovare il raggio dell'orbita per il quale un elettrone avrà velocità pari al 10% della velocità della luce e determinare poi l'energia cinetica in eV. Ignorare i piccoli effetti relativistici.

Soluzione. Il raggio dell'orbita si ottiene considerando la forza magnetica una forza centripeta, per cui

$$evB = m\frac{v^2}{r}$$

Assumendo la velocità della luce pari a $3.00 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$, la velocità dell'elettrone sarà $3.00 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$ e, risolvendo rispetto a r, si ha

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \times 3.00 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 0.50\,T} = 3.42 \cdot 10^{-4}\,m$$

e l'energia cinetica sarà

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \times 9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \times \left(3.0 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}\right)^2 \times 6.24 \cdot 10^{18}\,\frac{eV}{J} = 2.56\,keV$$

Esercizio 31. Trovare l'intensità del campo magnetico uniforme tale da permettere a un protone con una velocità di $1.0 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$ di muoversi su un cerchio delle dimensioni dell'equatore terrestre.

Soluzione. Il cerchio dell'equatore terrestre ha come raggio quello terrestre che assumiamo pari a $6.37 \cdot 10^9\,m$. Il campo dovrà pertanto valere

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27}\,kg \times 1.0 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 6.37 \cdot 10^9\,m} = 1.64 \cdot 10^{-11}\,T$$

Esercizio 32. Un elettrone con energia cinetica $1.20\,keV$ si muove su un'orbita circolare in un piano perpendicolare a un campo magnetico uniforme. L'orbita ha raggio $25.0\,cm$. Calcolare la velocità dell'elettrone, il campo magnetico, la frequenza e il periodo di rivoluzione.

Soluzione. Un'energia cinetica di $1.20\,keV$ corrisponde a $1.20 \cdot 10^3\,eV \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,\frac{J}{eV} = 1.92 \cdot 10^{-16}\,J$. La velocità dell'elettrone è ottenibile dalla relazione che esprime l'energia cinetica

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.92 \cdot 10^{-16}\,J}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg}} = 2.05 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$$

Il campo magnetico sarà espresso, nelle condizioni indicate, da

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \times 2.05 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 0.25\,m} = 4.67 \cdot 10^{-4}\,T$$

La frequenza di rivoluzione, ricordando le leggi che descrivono il moto circolare uniforme, è data

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2.05 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}}{2\pi \times 0.25\,m} = 1.31 \cdot 10^7\,Hz$$

e di conseguenza il periodo, che è il reciproco della frequenza, sarà $T = 7.66 \cdot 10^{-8}\,s$.

Esercizio 33. Il fisico Goudsmit escogitò un metodo per determinare accuratamente le masse di ioni pesanti, misurando il loro periodo di rivoluzione in un campo magnetico noto. Uno ione di sodio con carica $+e$ compie 7.00 rivoluzioni in un campo di $45.0\,mT$ in $1.29\,ms$. Calcolare la sua massa, in unità di massa atomica.

Soluzione. Lo ione compirà una rivoluzione (il periodo di rivoluzione) in

$$T=\frac{1.29\,ms}{7.00}=0.184\,ms$$

La frequenza di rivoluzione sarà

$$f=\frac{1}{T}=5435\,Hz$$

Dalla relazione

$$eB=m\frac{v}{r}$$

essendo $\frac{v}{r}=2\pi f$, si ottiene

$$m(uma)=\frac{eB}{2\pi f}=\frac{1.60\cdot10^{-19}\,C\times45.0\cdot10^{-3}\,T}{2\pi\times5435\,s^{-1}}\times\frac{1}{1.67\cdot10^{-27}\,kg}=126\,u$$

Esercizio 34. Una particella α ($q=+2e$, $m=4.00\,u$) si muove su un cammino circolare di raggio $4.50\,cm$ in un campo magnetico di intensità $B=1.2\,T$. Calcolare la sua velocità, il suo periodo di rivoluzione, la sua energia cinetica in eV e la differenza di potenziale alla quale dovrebbe essere sottoposta per raggiungere questa energia.

Soluzione. Risolviamo l'equazione che assegna alla forza magnetica la caratteristica di forza centripeta rispetto alla velocità:

$$v=\frac{Bqr}{m}=\frac{1.2\,T\times2\times1.60\cdot10^{-19}\,C\times4.50\cdot10^{-2}\,m}{4.00\times1.67\cdot10^{-27}\,kg}=2.60\cdot10^{6}\,\frac{m}{s}$$

il periodo di rivoluzione è allora dato dalle leggi del moto circolare uniforme

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\times4.50\cdot10^{-2}\,m}{2.60\cdot10^{6}\,\frac{m}{s}}=1.09\cdot10^{-7}\,s$$

l'energia cinetica sarà pari a

$$K\,(eV)=\frac{1}{2}mv^2=\left[0.5\times4.00\times1.67\cdot10^{-27}\times\left(2.60\cdot10^{6}\right)^2\right]\,J\times6.242\cdot10^{18}\,\frac{eV}{J}=140\,keV$$

la differenza di potenziale sarà, pertanto, $70\,keV$, in quanto l'energia cinetica è relativa a due particelle cariche.

Esercizio 35. Calcolare la frequenza di rivoluzione di un elettrone di energia $100\,eV$ in un campo magnetico di $35.0\,\mu T$. Determinare poi il raggio del percorso di questo elettrone se la velocità è perpendicolare al campo magnetico.

Soluzione. La frequenza in un moto circolare uniforme è data dal rapporto tra la velocità e la misura della circonferenza del percorso. Se l'elettrone ha l'energia cinetica indicata, la sua velocità sarà

$$v=\sqrt{\frac{2K}{m}}=\sqrt{\frac{2\times100\,eV\times1.602\cdot10^{-19}\,\frac{J}{eV}}{9.11\cdot10^{-31}\,kg}}=5.93\cdot10^{6}\,\frac{m}{s}$$

il raggio dell'orbita sarà

$$r=\frac{vm}{Be}=\frac{5.93\cdot10^{6}\,\frac{m}{s}\times9.11\cdot10^{-31}\,kg}{35.0\cdot10^{-6}\,T\times1.60\cdot10^{-19}\,C}=0.965\,m$$

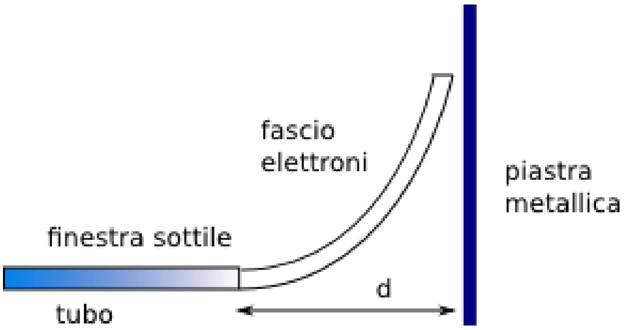
Troviamo ora la frequenza

$$f=\frac{v}{2\pi r}=\frac{5.93\cdot10^{6}\,\frac{m}{s}}{2\pi\times0.965}=9.78\cdot10^{5}\,Hz$$

Esercizio 36. Un fascio di elettroni la cui energia cinetica è K emerge da una ■finestra■ fatta di una sottile lamina sul fondo di un tubo acceleratore. Una piastra di metallo è posta a una distanza d da questa finestra perpendicolarmente al fascio emergente (vedasi figura). Dimostrare che si può evitare che il fascio colpisca la piastra, applicando un campo magnetico B tale che

$$B\geq\sqrt{\frac{2mK}{e^2d^2}}$$

in cui m ed e sono massa e carica dell'elettrone.



Soluzione. Supponiamo che la distanza d sia il raggio della curva quando il fascio di elettroni ■sfiora■ la piastra metallica. La relazione,

$$eB = m\frac{v^2}{r}$$

tenendo conto che $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, può essere riscritta come

$$eB = \frac{m}{d}\sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2m^2K}{md^2}} = \sqrt{\frac{2mK}{d^2}}$$

poiché il fascio non deve colpire la piastra, il campo magnetico deve essere più intenso, per cui

$$B \geq \sqrt{\frac{2mK}{e^2d^2}}$$

Esercizio 37. Un protone, un deutone e una particella alfa, accelerati sotto la stessa differenza di potenziale V, entrano in una regione con un campo magnetico uniforme, muovendosi perpendicolarmente rispetto a $\boldsymbol{B}$. Confrontare le loro energie cinetiche. Se il raggio dell'orbita del protone è $10\,cm$, trovare i raggi delle orbite del deutone e della particella alfa.

Soluzione. Il protone è la particella elementare positiva, il deutone è il nucleo del deuterio, un isotopo dell'idrogeno formato da un protone e un neutrone, mentre la particella radioattiva α è un nucleo dell'atomo di elio composto da due protoni e due neutroni. Considerando le masse di protone e neutrone pressoché uguali, l'energia cinetica delle particelle, a parità di differenza di potenziale accelerante, dipenderà dalla loro diversa massa e dalle conseguenti diverse velocità. L'energia potenziale è il prodotto della differenza di potenziale per la carica accelerata. Applicando la legge di conservazione dell'energia si ha:

$$U = qV = K$$

ma, a parità di differenza di potenziale, avremo una energia potenziale, U, diversa e quindi una diversa energia cinetica.

$$\begin{array}{cc} protone & U = K_p = V \;\; (q=1) \\ deutone & U = K_d = V \;\; (q=1) \\ \alpha & U = K_\alpha = 2V \;\; (q=2) \end{array}$$

Se il raggio di curvatura per il protone è $10\,cm$, allora

$$\frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{2K_pm}}{qB} = 10$$

il deutone ha stessa carica ma massa doppia e uguale energia cinetica, per cui la velocità sarà $v_d = \sqrt{2}v_p$, per cui

$$r = 10 \times \sqrt{2} = 14\,cm$$

la particella α ha massa quadrupla e carica doppia e energia cinetica doppia, per cui $v_\alpha = v_d$, per cui

$$r = 14\,cm$$

Soluzione 38. Un positrone con energia cinetica di $2.0\,keV$ è proiettato in un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B} = 0.10\,T$; il vettore velocità forma un angolo di 89° con $\boldsymbol{B}$. Calcolare il periodo, il passo p e il raggio r dell'orbita elicoidale.

Soluzione. Se la velocità di una particella carica ha una componente parallela al campo magnetico, la particella si muoverà attorno alla direzione del campo in un percorso elicoidale. In particolare, la componente parallela al campo determina il passo dell'elica, cioè la distanza tra due spire adiacenti, mentre la componente perpendicolare determina il raggio dell'orbita. Calcoliamo pertanto le due componenti della velocità rispetto alla direzione del campo magnetico:

$$v_{||} = v \times \cos 89^\circ$$
$$v_{\perp} = v \times \sin 89^\circ$$

Il positrone è la particella di antimateria dell'elettrone e avrà quindi la stessa massa dell'elettrone e la stessa carica ma con segno positivo. Conoscendo l'energia cinetica è possibile ottenere il valore della velocità

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.0 \cdot 10^3 \, eV \times 1.602 \cdot 10^{-19} \, \frac{J}{eV}}{9.11 \cdot 10^{-31} \, kg}} = 2.652 \cdot 10^7 \, \frac{m}{s}$$

da cui

$$v_{||} = 4.62 \cdot 10^5 \, \tfrac{m}{s}$$
$$v_{\perp} = 2.651 \cdot 10^7 \, \tfrac{m}{s}$$

Il periodo T è dato da

$$T = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi \times 9.11 \cdot 10^{-31} \, kg}{1.60 \cdot 10^{-19} \, C \times 0.10 \, T} = 3.58 \cdot 10^{-10} \, \frac{m}{s}$$

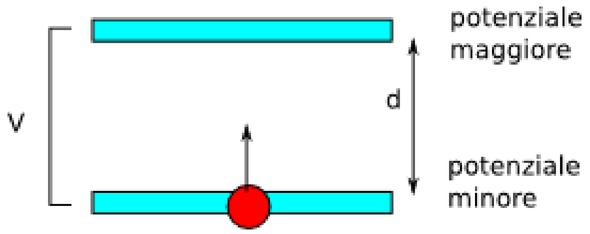
il passo

$$p = v_{||} T = 4.62 \cdot 10^5 \, \frac{m}{s} \times 3.58 \cdot 10^{-10} \, s = 1.65 \cdot 10^{-4} \, \frac{m}{s}$$

mentre il raggio è dato da

$$r = \frac{m v_{\perp}}{eB} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \, kg \times 2.651 \cdot 10^7 \, \frac{m}{s}}{1.60 \cdot 10^{-19} \, C \times 0.10 \, T} = 1.46 \cdot 10^{-3} \, m$$

Esercizio 39. Un elettrone di massa m, carica e e bassa velocità (trascurabile) entra in una regione compresa tra due piastre tenute a differenza di potenziale V e a distanza d e si dirige inizialmente verso il piatto superiore. Un campo magnetico uniforme di intensità B è normale al piano della figura. Calcolare il minimo valore di B che permette all'elettrone di evitare l'impatto con il piatto superiore.



Soluzione. Il campo magnetico che produce un raggio di curvatura massimo d, è uguale a

$$B = \frac{mv}{ed}$$

ma, dalla legge di conservazione dell'energia, si ha

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

e sostituendo

$$B = \frac{m\sqrt{\frac{2eV}{m}}}{ed} = \frac{\sqrt{2emV}}{ed} = \sqrt{\frac{2mV}{ed^2}}$$

Esercizio 40. In un ciclotrone, un protone si muove su un cerchio di raggio $0.50 \, m$. L'intensità del campo magnetico è di $1.2 \, T$. Trovare la frequenza del ciclotrone e l'energia cinetica del protone in eV.

Soluzione. La frequenza con la quale il protone si muove lungo la traiettoria circolare del ciclotrone è data da

$$f=\frac{v}{2\pi r}$$

La forza del campo magnetico che curva il protone obbligandolo a percorrere la traiettoria circolare è

$$qB=\frac{mv}{r}$$

sostituendo v, e risolvendo rispetto a f, si ha

$$f=\frac{qB}{2\pi m}=\frac{1.60\cdot10^{-19}\,C\times1.2\,T}{2\pi m}=1.83\cdot10^{7}\,Hz$$

la velocità con cui il protone ruota è

$$v=2\pi rf=2\pi\times0.50\,m\times1.83\cdot10^{7}\,Hz=5.75\cdot10^{7}\,\frac{m}{s}$$

l'energia cinetica sarà

$$K=\frac{1}{2}mv^2=0.5\times1.67\cdot10^{-27}\,kg\times\left(5.75\cdot10^{7}\,\frac{m}{s}\right)^2\times6.242\cdot10^{18}\,\frac{eV}{J}=17.2\,MeV$$

Esercizio 41. Un fisico sta progettando un ciclotrone per accelerare protoni fino al 10% della velocità della luce. Il magnete produce un campo di $1.4\,T$. Determinare il raggio del ciclotrone e la corrispondente frequenza dell'oscillatore.

Soluzione. La velocità che si vuole raggiungere è $3.0\cdot10^{7}\,\frac{m}{s}$. Il raggio sarà

$$r=\frac{mv}{qB}=\frac{1.67\cdot10^{-27}\,kg\times3.0\cdot10^{7}\,\frac{m}{s}}{1.60\cdot10^{-19}\,C\times1.4\,T}=0.22\,m$$

la frequenza dell'oscillatore sarà

$$f=\frac{v}{2\pi r}=\frac{3.0\cdot10^{7}\,\frac{m}{s}}{2\pi\times0.22\,m}=2.2\cdot10^{7}\,Hz$$

Esercizio 42. Un conduttore orizzontale di una linea di potenza è percorso da una corrente di 5000 A da nord a sud. Il campo magnetico terrestre nelle vicinanze della linea è di $60.0\,\mu T$ ed è diretto verso nord, inclinato verso il basso di 70.0° rispetto alla linea. Determinare l'intensità della forza magnetica dovuta al campo terrestre su $100\,m$ di conduttore.

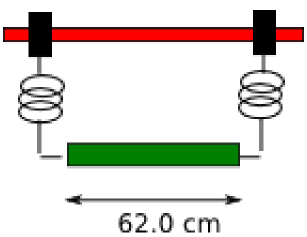
Soluzione. In questo caso il campo magnetico non è perpendicolare al filo e la forza, legata da una relazione vettoriale, è data da

$$\boldsymbol{F}=i\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}=iLB\sin\theta$$

dove i è l'intensità della corrente che passa nel filo, L è la lunghezza del filo rettilineo e θ è l'angolo tra il filo e la direzione del campo magnetico. Sostituendo si ha

$$F=5000\,A\times100\,m\times60.0\cdot10^{-6}\,T\times\sin70.0°=28.2\,N$$

Esercizio 43. Un cavo di lunghezza pari a $62.0\,cm$ e di massa pari a $13.0\,g$ è sospeso su un paio di elettrodi elastici in un campo magnetico di $0.440\,T$. Determinare il valore e il verso della corrente nel cavo richiesta per annullare la tensione meccanica degli elettrodi determinata dal peso del cavo.



Soluzione. La massa di $13.0\,g$ ha un peso di $P = 13.0 \cdot 10^{-3}\,kg \times 9.81\,\frac{m}{s^2} = 0.127\,N$. Per annullare la tensione meccanica la corrente deve generare una forza dello stesso valore ma di verso opposto, cioè verso l'alto. Calcoliamo questa corrente

$$i = \frac{F}{LB} = \frac{0.127\,N}{0.62\,m \times 0.440\,T} = 0.467\,A$$

Se il campo è diretto perpendicolarmente al foglio e diretto verso l'alto e la forza è diretta verso l'alto nel piano della figura, la corrente avrà verso da sinistra a destra (applicando la regola della mano destra).

Esercizio 44. Un cavo lungo $1.80\,m$ è percorso da una corrente di $13.0\,A$ e forma un angolo di $35.0°$ con un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1.50\,T$. Calcolare la forza magnetica sul cavo.

Soluzione. Anche in questo caso la forza magnetica è espressa da:

$$\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} = iLB\sin\theta = 13.0\,A \times 1.80\,m \times 1.50\,T \times \sin 35.0° = 20.1\,N$$

Esercizio 45. Un cavo lungo $50\,cm$ disposto lungo l'asse x è percorso da una corrente di $0.50\,A$ nel verso positivo delle x, attraverso un campo magnetico $\boldsymbol{B} = (0.0030\,T)\,\boldsymbol{j} + (0.010\,T)\,\boldsymbol{k}$. Calcolare la forza agente sul cavo.

Soluzione. La forza è espressa dal prodotto vettoriale tra il campo magnetico e la lunghezza del filo moltiplicato per l'intensità della corrente

$$\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} = iL\boldsymbol{i} \times (B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k})$$

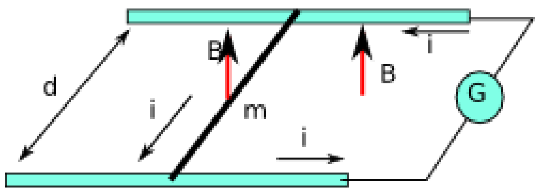
applicando la definizione di prodotto vettoriale si ha

$$\boldsymbol{F} = i\,(L_yB_z - L_zB_y)\,\boldsymbol{i} - (L_xB_z - L_zB_x)\,\boldsymbol{j} + (L_xB_y - L_yB_z)\,\boldsymbol{k}$$

ma $L_y = L_z = 0$ e $B_x = 0$, per cui si avrà

$$\boldsymbol{F} = i\,(0-0)\,\boldsymbol{i} - (0.50 \cdot 0.010 - 0 \cdot 0)\,\boldsymbol{j} + (0.5 \cdot 0.030 - 0 \cdot 0)\,\boldsymbol{k} = 0.5\,(-0.005\boldsymbol{j} + 0.0015\boldsymbol{k}) = \left(-2.5 \cdot 10^{-3}\boldsymbol{j} + 0.75 \cdot 10^{-3}\boldsymbol{k}\right)\,N$$

Esercizio 46. Un cavo metallico di massa m può scorrere senza attrito lungo due rotaie orizzontali separate da una distanza d, come in figura. L'insieme giace in un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}$. Una corrente costante i fluisce dal generatore G lungo una rotaia, passa attraverso il cavo e poi lungo la seconda rotaia. Trovare la velocità media (modulo e verso) del cavo in funzione del tempo, assumendo che sia fermo per $t = 0$.



Soluzione. la forza che agisce su un filo percorso da corrente è data da $F = idB$. La velocità media è espressa da $v = at$, ma l'accelerazione $a = \frac{F}{m}$, da cui

$$v = at = \frac{Ft}{m} = \frac{idBt}{m}$$

il cavo si sposterà verso sinistra allontanandosi dal generatore (regola della mano destra: pollice verso l'alto, medio rivolto verso il corpo e l'indice (la forza) sarà diretto verso sinistra).

Esercizio 47. Una sbarra di rame di $1.0\,kg$ è ferma su due rotaie orizzontali distanti fra loro $1.0\,m$ e viene fatta passare una corrente di $50\,A$ da una rotaia all'altra. Il coefficiente di attrito statico è 0.60. Trovare il campo magnetico minimo (non necessariamente verticale) necessario a spostare la barra.

Soluzione. La forza magnetica deve spingere orizzontalmente la sbarra per vincere la forza d'attrito, ma può essere orientata in modo da ridurre sia la componente della forza magnetica sia la forza d'attrito. Le forze che agiscono sulla sbarra sono: la forza magnetica, $\boldsymbol{F}$, la forza di gravità diretta verso il basso, mg, $\boldsymbol{F}_N$, la forza vincolare diretta verso l'alto esercitata dalla rotaia sull'asta e la forza d'attrito orizzontale, $\boldsymbol{f}$. Assumiamo che l'asta si trovi sul bordo e si sposti verso destra, per cui la forza d'attrito sarà diretta nel verso contrario, cioè verso sinistra, e ciò determina la condizione in cui la forza d'attrito assume il massimo valore $\mu_s F_N$. In questo modo, scomponiamo $\boldsymbol{F}$ in una componente verso orizzontale destra e una verticale verso l'alto che possiamo indicare con F_x e F_y, assumendo una opportuna direzione per la corrente, che verrà assunta fluire verso nord. Allora, per la regola della mano destra, una componente verso il basso, B_b, del campo magnetico produrrà la forza diretta verso destra, F_x, e una componente verso sinistra, B_s produrrà la forza F_y verso l'alto. Traducendo in linguaggio matematico, avremo

$$F_x = iLB_b F_y = iLB_s$$

Le forze lungo l'asse verticale saranno

$$F_N = mg - F_y = mg - iLB_s$$

e quindi

$$f = f_{s,max} = \mu_s \left(mg - iLB_s\right)$$

sul bordo del moto, quindi l'accelerazione orizzontale sarà posta uguale a zero, da cui

$$F_x - f = 0 iLB_b = \mu_s \left(mg - iLB_s\right)$$

L'angolo dei componenti del campo deve essere tale da minimizzare il campo stesso. Definiamo quindi

$$B_s = B\sin\theta B_b = B\cos\theta$$

con θ misurato dall'asse verticale. Possiamo pertanto riscrivere la relazione

$$iLB\cos\theta = \mu_s \left(mg - iLB\sin\theta\right)$$

ricavando B s ha,

$$iLB\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right) = \mu_s mg$$

$$B = \frac{\mu_s mg}{iL\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right)}$$

Differenziando rispetto a θ e ponendo la derivata uguale a zero, si ha

$$0 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mu_s mg}{iL\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right)}\right) = \frac{-iL\mu_s mg\left(-\sin\theta + \mu_s\cos\theta\right)}{\left[iL\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right)\right]^2}$$

$$-\sin\theta + \mu_s\cos\theta = 0$$

risolvendo l'equazione goniometrica lineare dividendo tutto per $\cos\theta$, si ha

$$\tan\theta = \mu_s$$

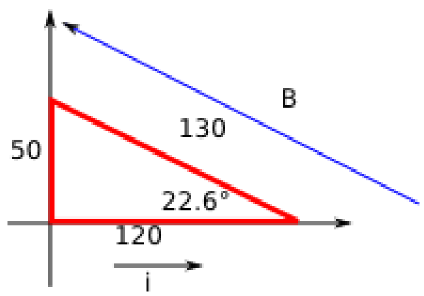
da cui

$$\theta = \arctan(0.60) = 31°$$

Sostituiamo ora tutti i valori per calcolare il campo magnetico

$$B = \frac{0.60 \times 1.0\,kg \times 9.81\,\frac{m}{s^2}}{50\,A \times 1.0\,m\left(\cos 31° + 0.60 \times \sin 31°\right)} = 0.10\,T$$

Esercizio 48. Una spira percorsa da una corrente di $4.00\,A$ ha la forma di un triangolo rettangolo di lati $50.0\,cm$, $120\,cm$, e $130\,cm$. Viene posta in un campo magnetico uniforme di $75.0\,mT$ la cui direzione è parallela alla corrente nel lato di $130\,cm$. Determinare l'intensità della forza magnetica agente su ciascuno dei tre lati della spira e mostrare che la forza magnetica totale sulla spira è nulla.



Soluzione. Nella spira immersa in un campo magnetico la corrente circolante non avrà lo stesso verso in tutti i lati e ciò determina la presenza di una coppia di forze che genera un momento in grado di farla ruotare attorno al suo asse centrale. Nel nostro caso il triangolo risulta rettangolo (basta applicare l'inverso del th. di Pitagora: $50.0^2 + 120^2 = 130^2$). Il lato maggiore sarà quindi l'ipotenusa del triangolo che è parallela al campo magnetico applicato. Scegliamo una configurazione nella quale i due cateti siano allineati lungo gli assi perpendicolari di un piano cartesiano; in particolare, il vertice dell'angolo retto sia l'origine del piano, il cateto minore sia disposto lungo l'asse y e il cateto maggiore lungo l'asse x. Possiamo calcolare l'angolo acuto formato dall'ipotenusa con il cateto maggiore lungo l'asse x

$$\theta = \arctan\left(\frac{50}{120}\right) = 22.6°$$

Di conseguenza l'angolo formato dall'ipotenusa con l'asse x , che rappresenta il coefficiente angolare della retta contenente l'ipotenusa, sarà l'angolo supplementare, cioè 157° (si noti che per questo angolo la tangente è negativa). Dovendo trovare solo l'intensità delle forze, possiamo assumere la corrente circolante nel verso antiorario. Prenderemo pure il verso del campo magnetico come quello della corrente. Le componenti del campo magnetico lungo i due assi sono

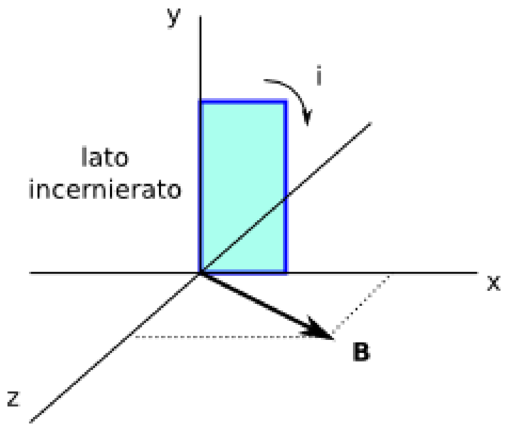
$$B_x = -B\cos\theta = -0.692\,T \qquad B_y = B\sin\theta = 0.0288\,T$$

La forza applicata sul tratto della spira parallela all'ipotenusa sarà nulla, essendo$B$ e i paralleli. Le forze sugli altri due tratti saranno

$$F_x = iLB_x = 4.00\,A \times -0.692\,T \quad \times 0.50\,m = -1.38\,N \qquad F_y = iLB_y = 4.00\,A \times -0.0228\,T \times 1.20\,m = 1.38\,N$$

La somma di tutte le forze che agiscono sarà, pertanto, nulla.

Esercizio 49. La bobina rettangolare in figura di $10\,cm \times 5\,cm$ è composta da 20 spire. Essa è percorsa da una corrente di $0.10\,A$ ed è incernierata lungo un lato. È montata con il suo piano che forma un angolo di 30° con la direzione di un campo magnetico di $0.50\,T$. Calcolare il momento della forza che agisce sulla bobina rispetto all'asse della cerniera.



Soluzione. Calcoliamo le componenti del campo magnetico lungo gli assi x e z.

$$B_x = 0.50\,T \times \cos 30° = 0.43\,T \qquad B_z = 0.50\,T \times \sin 30° = 0.25\,T$$

Poiché si deve calcolare il momento rispetto alla cerniera, posiamo ignorare la forza che agisce sul tratto lungo l'asse y (il braccio della forza è nullo). I tratti superiore e inferiore producono forze dovute alla componente B_z del campo magnetico ma sono nelle direzioni $\pm y$ e quindi non producono un momento sull'asse y. Di conseguenza, il momento deriva completamente dalla forza esercitata sul segmento posto a $x = 0.50\,m$, che ha lunghezza $0.10\,m$, parallelo alla cerniera, come si vede dalla figura. In questo tratto la corrente circola nella direzione $-y$. La componente B_z produrrà una forza che punta nella direzione $-x$ (per la regola della mano destra) e non eserciterà alcun momento. La componente B_x, invece, produce una forza uguale a $NiLB_x$ diretta nel verso positivo dell'asse z. Tale forza è perpendicolare al piano della bobina ed è posta ad una distanza x dalla cerniera e il momento sarà

$$\tau = NiLB_x x = 20 \times 0.10\,A \times 0.10\,m \times 0.43\,T \times 0.050\,m = 0.0043\,Nm$$

Esercizio 50. Trovare la forza magnetica alla quale è soggetto un filo lungo $2.15\,m$ percorso da una corrente di $0,899\,A$ e perpendicolare a un campo magnetico di $0.720\,T$.

Soluzione. Su un filo rettilineo percorso da corrente si esercita una forza magnetica espressa dalla relazione

$$F = ilB\sin\theta$$

dove i è l'intensità della corrente, l la lunghezza del filo e θ l'angolo tra la direzione della corrente e del campo magnetico, in questo caso $= 90°$. Sostituendo i valori assegnati, si ha

$$F = 0.899\,A \times 2.15\,m \times 0.720\,T = 1.39\,N$$

Esercizio 51. Un filo percorso da corrente di $2.8\,A$ forma un angolo di $36°$ con un campo magnetico di $0.88\,T$. Calcolare la forza esercitata su $2.25\,m$ di lunghezza del filo.

Soluzione. Applichiamo la relazione che esprime la forza in funzione della corrente, del campo e della lunghezza del filo

$$F = ilB\sin\theta = 2.8\,A \times 2.25\,m \times 0.88\,T \times \sin 36° = 3.3\,N$$

Esercizio 52. La forza magnetica esercitata su un segmento di $1.2\,m$, di un filo rettilineo vale $1.6\,N$. Il filo è percorso da una corrente di $3.0\,A$ ed è immerso in un campo magnetico costante di $0.50\,T$. Trovare l'angolo tra il filo e il campo magnetico.

Soluzione. La relazione che esprime la forza è data da $F = ilB\sin\theta$; sostituendo i valori e risolvendo rispetto a θ, si ottiene

$$\theta = \arcsin\left(\frac{F}{ilB}\right) = \arcsin\left(\frac{1.6\,N}{3.0\,A \times 1.2\,m \times 0.50\,T}\right) = 63°$$

Esercizio 53. Un lungo filo sottile è immerso in un campo magnetico costante B. Il filo è percorso da una corrente di $6.2\,A$ e forma un angolo di $7.5°$ con la direzione del campo magnetico. Sapendo che la forza magnetica esercitata è di $0.033\,N$, trovare l'intensità del campo magnetico.

Soluzione. La relazione che esprime la forza è data da $F = ilB\sin\theta$; sostituendo i valori e risolvendo rispetto a B, si ha

$$B = \frac{F}{il\sin\theta} = \frac{0.033\,N}{6.2\,A \times \sin 7.5°} = 0.04\,T$$

Esercizio 54. Un filo lungo $3.6\,m$ ha una massa pari a $0.75\,kg$ ed è immerso in un campo magnetico di $0.84\,T$. Trovare la corrente minima in grado di sollevare il filo.

Soluzione. Per sollevare il filo bisogno contrastare il suo peso che vale $P = mg = 0.75\,kg \times 9.81\,\frac{m}{s^2} = 7.4\,N$. La forza minima sarà, pertanto:

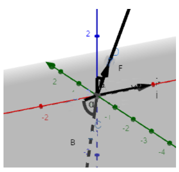
$$F = ilB \qquad\qquad i = \frac{F}{lB} = \frac{7.4\,N}{3.6\,m \times 0.84\,T} = 2.4\,A$$

Esercizio 55. Una linea elettrica ad alta tensione trasporta una corrente di $110\,A$ in una zona in cui il campo magnetico terrestre ha un'intensità di $0.59 \cdot 10^{-4}\,T$ e punta verso nord, $72°$ al di sotto dell'orizzontale. Determinare la direzione e l'intensità della forza magnetica esercitata su un tratto di linea lungo $250\,m$ nel caso in cui la corrente scorre orizzontalmente verso est.

Soluzione. Calcoliamo il modulo della forza magnetica (la sua intensità):

$$F = ilB\sin\theta = 110\,A \times 250\,m \times 0.59 \cdot 10^{-4}\,T \times \sin 72° = 1.6\,N$$

La direzione e il verso sono mostrati nella figura. (Direzione verso nord con un angolo di $18°$).



Esercizio 56. Si consideri una spira quadrata percorsa da una corrente e immersa in un campo magnetico parallelo ad lato del quadrato. Si sa che $B = 0.34\,T$ e $I = 9.5\,A$. Inoltre il lato della spira è lungo $0.46\,m$. Determinare l'intensità della forza magnetica esercitata su ogni lato della spira.

Soluzione. La forza è data da $F = iBl\sin\theta$. Se l'angolo tra i e B è uguale a zero, allora la forza è nulla. Così sarà per i lati della spira paralleli al campo magnetico. Gli altri due lati del quadrato saranno perpendicolari e formeranno, pertanto, un angolo di $90°$ ($\sin 90° = 1$). In tal caso la forza sarà:

$$F = 9.5\,A \times 0.34\,T \times 0.46\,m = 1.5\,N$$

Esercizio 57. L'intensità del campo magnetico a $88.0\,cm$ di distanza dall'asse di un lungo filo rettilineo è $7.30\,\mu T$. Calcolare la corrente passante nel filo.

Soluzione. Si può supporre che il filo sia infinitamente esteso e, pertanto, la relazione che lega il campo magnetico alla corrente è:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

dove μ_o è la permeabilità magnetica del vuoto, i la corrente nel filo e r la distanza tra il filo e il punto in cui si vuole determinare l'intensità del campo magnetico. Avremo, risolvendo rispetto a i

$$i = \frac{2\pi r B}{\mu_0} = \frac{2\pi \times 0.88\,cm \times 7.30 \cdot 10^{-6}\,T}{1.26 \cdot 10^{-6}\,\frac{Tm}{A}} = 32.1\,A$$

Esercizio 58. Un filo scoperto di rame ($2.6\,mm$ di diametro) può portare una corrente di $50\,A$ senza surriscaldare. Trovare il campo magnetico alla superficie del filo.

Applichiamo la legge di Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{1.26 \cdot 10^{-6}\,\frac{T \cdot m}{A}}{2\pi \cdot 1.3 \cdot 10^{-3}\,m} = 7.7 \cdot 10^{-3}\,T$$

Esercizio 59. Un topografo sta usando una bussola $6.3\,m$ sotto a un cavo attraverso cui scorre una corrente di $120\,A$. La lettura della bussola sarà affidabile? Si tenga conto che la componente orizzontale del campo magnetico terrestre in quel punto è di $21\,\mu T$.

Soluzione. Il campo magnetico generato da un filo percorso da corrente può essere descritto dalla legge di Biot-Savart, cioè

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot m}{A} \times 120\,A}{2\pi \times 6.3\,m} = 3.8 \cdot 10^{-6}\,T$$

In questo caso il campo generato dal filo alla distanza indicata è quasi sei volte inferiore a quello terrestre e la bussola si sposterà assai poco rendendo la misura poco affidabile.

Esercizio 60. Il cannone elettronico da $25\,kV$ di un tubo catodico TV spara un fascio di elettroni del diametro di $0.22\,mm$ sullo schermo con una intensità di $5.6 \cdot 10^{14}$ al secondo. Si calcoli il campo magnetico prodotto dal fascio in un punto ad $1.5\,mm$ dal centro del fascio stesso.

Soluzione. Il fascio di elettroni rappresenta una corrente la cui intensità è data dalla quantità di carica che attraversa la sezione di $0.22\,mm$ di diametro ogni secondo, per cui

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{5.6 \cdot 10^{14} \cdot 1.60 \cdot 19^{-19}\,\mathrm{C}}{1\,s} = 9.0 \cdot 10^{-5}\,A$$

dove $1.60 \cdot 19^{-19}\,\mathrm{C}$ è la carica di un elettrone. Il campo prodotto alla distanza $r = 0.11 + 1.5 = 1.61\,mm$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot m}{A} \times 9.0 \cdot 10^{-5}\,A}{2\pi \times 1.61 \cdot 10^{-3}\,m} = 1.12 \cdot 10^{-8}\,T$$

Esercizio 61. In un certo punto delle Filippine, il campo magnetico terrestre è di $39.0\,\mu T$, è orizzontale e diretto verso nord. Il campo totale è nullo $8.13\,cm$ al di sopra si un filo rettilineo orizzontale attraverso cui scorre una corrente. Determinare la corrente.

Soluzione. Se il campo totale è nullo, vuol dire che il filo percorso da corrente genera nella posizione indicata un campo opposto a quello terrestre, per cui

$$i=\frac{2\pi rB}{\mu_0}=\frac{8.13\cdot10^{-2}\times39.0\cdot10^{-6}}{2\cdot10^{-7}}=15.9\,A$$

Esercizio 62. Si consideri un filo rettilineo attraverso cui scorre una corrente di $48.8\,A$ ed un elettrone che viaggia con velocità $v=1.08\cdot10^7\,\frac{m}{s}$ ad una distanza di $5.20\,cm$ dal filo. Si calcoli la forza magnetica che agisce sull'elettrone nel caso che la sua velocità sia diretta (a) verso il filo, (b) parallelamente al filo e (c) in direzione normale ai due casi precedenti.

Soluzione. La forza magnetica è espressa dalla forza di Lorentz come $\overrightarrow{F}=q\overrightarrow{v}\otimes\overrightarrow{B}=qvB\sin\alpha$ dove α è l'angolo tra la direzione del vettore velocità e del vettore campo magnetico. Sostituiamo nella relazione precedente il valore del campo magnetico ricavato dalla legge di Biot-Savart e avremo

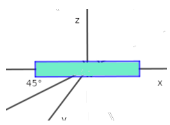
$$F=ev\frac{\mu_0 i\sin\alpha}{2\pi r}$$

Nel primo caso a) il campo magnetico e la direzione della velocità sono perpendicolari e quindi la forza è parallela e concorde alla direzione della corrente

$$F=1.60\cdot10^{-19}\times1.08\cdot10^7\frac{2\cdot10^{-7}\times48.8\times1}{5.20\cdot10^{-2}}=0.324\cdot10^{-15}\,N$$

nel caso b) il campo è sempre perpendicolare ma diretto radialmente e avrà lo stesso valore; nel caso c) l'angolo tra la direzione della velocità e del campo è nullo per cui la forza sarà uguale a zero.

Esercizio 63. La figura mostra un segmento di filo lungo $3.0\,cm$, il cui centro corrisponde all'origine degli assi cartesiani, e percorso da una corrente di $2.0\,A$ nella direzione $+y$. (Naturalmente questo segmento deve essere parte di un circuito completo). Per calcolare il campo $\boldsymbol{B}$ in un punto distante molti metri dall'origine, possiamo usare la legge di Biot-Savart nella forma $B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\Delta s\sin\theta}{r^2}$, nella quale $\Delta s=3.0\,cm$. Questo in quanto r e θ sono in pratica costanti lungo il segmento del filo. Calcolare $\boldsymbol{B}$(intensità e direzione) nei seguenti punti (x,y,z): (a) $(0,0,5.0\,m)$, (b) $(0,6.0\,m,0)$, (c) $(7.0\,m,7.0\,m,0)$, (d) $(-3.0\,m,-4.0\,m,0)$.



Soluzione. (a) La direzione della corrente è perpendicolare al filo, per cui $\theta=\frac{\pi}{2}$.

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\Delta s\sin\theta}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2.0\,A\cdot3.0\cdot10^{-2}\,m\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{25\,m^2}=2.41\cdot10^{-10}\,T$$

diretto lungo l'asse x

(1) (b) la direzione corrente è parallela al filo per cui $\theta=0$ e $\sin0=0$

$$B=0$$

(2) (c) la direzione della corrente forma una angolo di $\frac{\pi}{4}$ con il filo

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2.0\,A\cdot3.0\cdot10^{-2}\,m\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\left(7\sqrt{2}\right)^2\,m^2}=4.34\cdot10^{-11}\,T$$

diretto l'asse z

(3) (d) per calcolare l'angolo θ in questo caso dobbiamo prima calcolarne la tangente con il teorema sui triangoli rettangoli (la tangente di un angolo è uguale al rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente all'angolo)

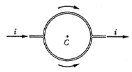
$$\tan\theta=-\frac{4}{3}\theta=\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)$$

da cui, applicando le formule goniometriche, si ricava $\sin\theta=0.8$. Pertanto,

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2.0\,A\cdot3.0\cdot10^{-2}\,m\cdot0.8}{(5)^2\,m^2}=1.93\cdot10^{-10}\,T$$

lungo l'asse z.

Esercizio 64. Un conduttore rettilineo attraverso cui scorre una corrente i si divide in due rami semicircolari come in figura. Qual è il campo magnetico al centro della spira così formata?



Soluzione. Il tratto rettilineo non produce alcun campo magnetico nel punto C interno alla spira circolare. I due rami semicircolari producono entrambi un campo $B = \frac{\mu_o i}{2r}$, ma avendo la corrente che li percorre versi opposti, la loro somma sarà nulla.

Esercizio 65. Due fili rettilinei paralleli distano $8.10\,cm$ l'uno dall'altro. Nei due fili scorre la stessa corrente i. Quanto deve valere i affinché nei punti di mezzo tra i due fili vi sia un campo magnetico di $296\,\mu T$?

Soluzione. Poiché il campo nella zona di mezzo non è nullo, possiamo dedurre che le correnti devono avere verso opposto per poter produrre due campi che hanno lo stesso verso. Il modulo del campo generato dai due fili sarà uguale a $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ e la somma dei due sarà

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 i}{\pi r}$$

pertanto

$$i = \frac{B_{tot}\pi r}{\mu_0} = \frac{296 \cdot 10^{-6} \times 4.05 \cdot 10^{-2}\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}} = 30\,A$$